ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

ĐỖ THỊ THU TRANG

MỘT SỐ LỚP BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KIỂU KLAMKIN TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

ĐỖ THỊ THU TRANG

MỘT SỐ LỚP BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KIỂU KLAMKIN TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8640113

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên, 10/2018

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề bất đẳng thức là một chuyên đề rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông. Bất đẳng thức không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số và giải tích mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực khác của toán học. Klamkin đã khảo sát nhiều lớp bất đẳng thức hình học liên quan đến hàm cosin và xét các dạng toán liên quan. Ta đã biết bất đẳng thức lượng giác kiểu Klamkin cho tam giác

$$\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C \leq \frac{\beta\gamma}{2\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{2\beta} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma}$$

ứng với mọi bộ số dương α, β, γ. Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng các phương pháp khác nhau của hình học như phương pháp véctơ và phương pháp tọa độ và cả phương pháp số phức.

Tuy nhiên, các dạng bất đẳng thức tương tự đối với các hàm lượng giác khác như hàm sin, tan và cotan thì người ta chưa chứng minh được bằng các phương pháp hình học và vì thế Klamkin không đề cập đến các dạng bất đẳng thức này. Đặc biệt, để chứng minh các bất đẳng thức tương tự đối với các lượng giác ngược thì ta cần đến các công cụ của giải tích (tính lồi, lõm) để khảo sát chúng.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi và nâng cao nghiệp vụ của bản thân về chuyên đề bất đẳng thức lượng giác, tôi chọn đề tài luận văn “Một số lớp bất đẳng thức lượng giác kiểu Klamkin trong tam giác”.

Luận văn này nhằm cung cấp một số dạng bất đẳng thức không đối xứng trong tam giác đối với các hàm lượng giác và lượng giác ngược cùng một số dạng liên quan.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương.

Chương 1. Một số lớp bất đẳng thức cơ bản. Nội dung chương trình bày các kiến thức cơ bản về hàm lượng giác, lượng giác ngược, hệ thức lượng giác. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi, bất đẳng thức Karamata cho hai dãy số cùng các hệ quả của chúng.

Chương 2. Bất đẳng thức kiểu Klamkin đối với các hàm lượng giác trong tam giác. Trình bày các bất đẳng thức kiểu Klamkin cho hàm cosin, hàm sin, hàm tan và cotan.

Chương 3. Bất đẳng thức kiểu Klamkin đối với các hàm lượng giác ngược. Trình bày các bất đẳng thức kiểu Klamkin cho hàm arccos, hàm arcsin, hàm arctan và hàm arccot.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy cô, những người đã tận tâm giảng dạy và chỉ bảo tác giả trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết hơn chân thành tới phòng Sau Đại học, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Người viết luận văn

Đỗ Thị Thu Trang

Chương 1. Một số lớp đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản

Chương này trình bày định nghĩa của các hàm lượng giác sin, cos, tan, cotan, các công thức biến đổi của các hàm lượng giác, hệ thức lượng trong tam giác. Ngoài ra, chúng tôi cũng nêu định nghĩa của các hàm lượng giác ngược cùng với một số tính chất của hàm lượng giác ngược, trình bày bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi, bất đẳng thức Karamata cho hai dãy số cùng các hệ quả của chúng.

1.1 Một số hệ thức cơ bản đối với hàm lượng giác ngược

Định lí 1.1 ([3]). *Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định, đồng biến hoặc nghịch biến và liên tục trong một khoảng X nào đó. Khi đó trong khoảng Y các giá trị tương ứng của hàm đó, tồn tại hàm ngược (đơn trị) $x = g(y)$ cũng là hàm đồng biến hoặc nghịch biến và liên tục trong khoảng đó.*

Từ các hàm lượng giác cơ bản $y = \sin x, y = \cos x, y = tanx, y = \cot x$, theo định lí trên, ta có các hàm lượng giác ngược.

Trong $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (hay trong $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$) hàm số $y = \sin x$ (hay $y = \tan x$) là hàm đồng biến, liên tục nên khi đó tồn tại hàm ngược $y = \arcsin x$ (hay $y = \arctan x$) như sau:

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x = \sin y \\ -1 \le x \le 1, -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\arcsin x) \equiv x \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x = \tan y \\ -\infty < x < \infty, -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\arctan x) \equiv x \\ -\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2} \\ -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Trong $[0,\pi]$ (hay trong $(0,\pi)$) hàm số $y = \cos x$ (hay $y = \cot x$) là hàm đồng biến, liên tục nên khi đó tồn tại hàm ngược $y = \arccos x$ (hay $y = \operatorname{arccot} x$) như sau:

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x = \cos y \\ -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\arccos x) \equiv x \\ 0 \le \arccos x \le \pi \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ x = \cot y \\ -\infty < x \le \infty, 0 < y < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot(\operatorname{arccot} x) \equiv x \\ 0 < \arctan x < \pi \\ -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Một số tính chất của các hàm lượng là

$$\begin{aligned} &\arcsin(-x) = -\arcsin x, \forall x \in [-1,1] \\ &\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \forall x \in [-1,1] \\ &\arctan(-x) = -\arctan x \\ &\operatorname{arccot}(-x) = -\operatorname{arccot} x. \end{aligned}$$

Hàm $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$ với $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ là hàm ngược của hàm $x = \sin y$. Khi đó ta có $x'_y = \cos y > 0$ với $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. Theo công thức đạo hàm hàm ngược ta có

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0.$$

Vậy hàm $y = \arcsin x$ là hàm đồng biến. Lại có $y''_x = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ nên $y''_x > 0$ với $0 < x < 1$ và $y''_x < 0$ với $-1 < x < 0$. Suy ra hàm $y = \arcsin x$ lõm với $0 < x < 1$ và lồi với $-1 < x < 0$. Hơn nữa, ta có

- với $0 < x < 1, y''_x > 0$ nên $y(x) > y(a) + y'(a)(x-a), \forall a \in (0,1)$

- với $-1 < x < 0, y''_x < 0$ nên $y(x) < y(a) + y'(a)(x-a), \forall a \in (-1,0)$.

Hàm $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1)$ với $0 < y < \pi$ là hàm ngược của hàm $x = \cos y$. Ta có $x'_y = -\sin y > 0$ với $0 < y < \pi$. Theo công thức đạo hàm hàm ngược ta có

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

nên hàm $y = \arccos x$ là hàm nghịch biến. Lại có $y''_x = -\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ nên $y''_x < 0$ với $0 < x < 1$ và $y''_x > 0$ với $-1 < x < 0$. Suy ra hàm $y = \arccos x$ lồi với $0 < x < 1$ và lõm với $-1 < x < 0$. Hơn nữa, ta có

- với $0 < x < 1, y''_x < 0$ nên $y(x) < y(a) + y'(a)(x-a), \forall a \in (0,1)$
- với $-1 < x < 0, y''_x > 0$ nên $y(x) > y(a) + y'(a)(x-a), \forall a \in (-1,0)$.

Hàm $y = \arctan x$ $(-\infty < x < \infty)$ với $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ là hàm ngược của hàm $x = \tan y$. Ta có $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$. Suy ra

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Do đó, hàm $y = \arctan x$ là hàm đồng biến. Lại có $y''_x = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ nên $y''_x < 0$ với $x > 0$ và $y''_x > 0$ với $x < 0$, suy ra hàm $y = \arctan x$ lồi với $x > 1$ và lõm với $x < 0$. Hơn nữa, ta có

- với $x > 0, y''_x < 0$ nên $y(x) < y(a) + y'(a)(x-a), \forall a > 0$
- với $x < 0, y''_x > 0$ nên $y(x) > y(a) + y'(a)(x-a), \forall a < 0$.

Hàm $y = \operatorname{arccot} x$ $(-\infty < x < \infty)$ với $0 < y < \pi$ là hàm ngược của hàm $x = \cot y$. Ta có $x'_y = -\dfrac{1}{\sin^2 y} = -(1+\cot^2 y) = -(1+x^2)$. Suy ra

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{1+x^2} < 0.$$

Do đó, hàm $y = \arccos x$ là hàm nghịch biến. Lại có $y''_x = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ nên $y''_x > 0$ với $x > 0$ và $y''_x < 0$ với $x < 0$. Suy ra hàm $y = \operatorname{arccot} x$ lõm với $x > 0$ và lồi với $x < 0$. Hơn nữa, ta có

- với $x > 0, y''_x > 0$ nên $y(x) > y(a) + y'(a)(x-a), \forall a > 0$
- với $x < 0, y''_x < 0$ nên $y(x) < y(a) + y'(a)(x-a), \forall a < 0$.

1.2 Bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức Karamata

1.2.1 Bất đẳng thức Jensen

Định lí 1.2 (Bất đẳng thức Jensen, [1]). *Nếu f là hàm lồi trên khoảng I thì với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Chúng ta vẫn quen với việc coi hàm lồi $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, khả vi cấp 2 và $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$. Tuy nhiên, với kiến thức THPT thì định lí Jensen có thể phát biểu dưới dạng đơn giản và dễ áp dụng hơn.

Hệ quả 1.1 ([1]). *Cho $f : I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \; \forall x, y \in I$. Khi đó với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ ta có bất đẳng thức*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Chứng minh. Chứng minh định lí trên ta dùng phương pháp quy nạp. Định lí trên giúp cho việc kiểm tra bất đẳng thức Jensen thuận tiện hơn nếu bạn không biết về đạo hàm. Sau đây là một chứng minh gắn gọn cho định lí.

Dễ thấy bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng nếu n là một lũy thừa của 2 và nếu bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, ta lấy $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ và $x_{k+1} = \frac{x}{k}$

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + f\left(\frac{x}{k}\right) \geq (k+1)f\left(\frac{x + \frac{x}{k}}{k+1}\right) = (k+1)f\left(\frac{x}{k}\right).$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Hiển nhiên nếu thay điều kiện

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

bởi

$$f(x)+f(y)\le 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

thì bất đẳng thức tổng quát cũng đổi chiều

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

Ví dụ 1.1. Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ ta có

$$\sin A+\sin B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Xét $f(x)=\sin x$ với $x\in(0,\pi)$. Ta có

$$f''(x)=-\sin x<0\ \forall x\in(0,\pi).$$

Từ đó theo bất đẳng thức Jensen thì

$$f(A)+f(B)+f(C)\le 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 1.2. Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ đều, ta có

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}.$$

Lời giải. Xét $f(x)=\tan x$ với $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0\ \ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó theo bất đẳng thức Jensen thì

$$f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)\ge 3f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{2}\right)=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ đều, ta có

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}.$$